ME951 - Estatística e Probabilidade I

Parte 12

1S2024

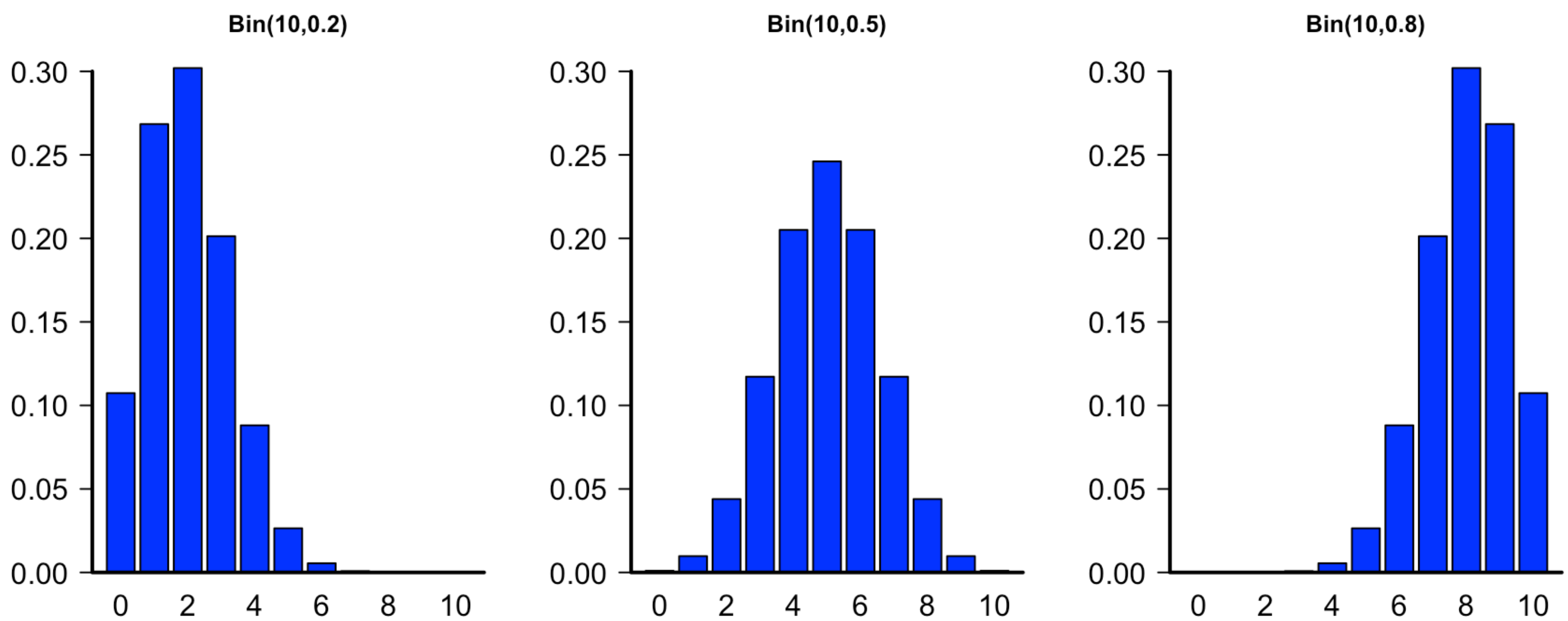
Variáveis Aleatórias Contínuas

Variáveis Aleatórias Contínuas

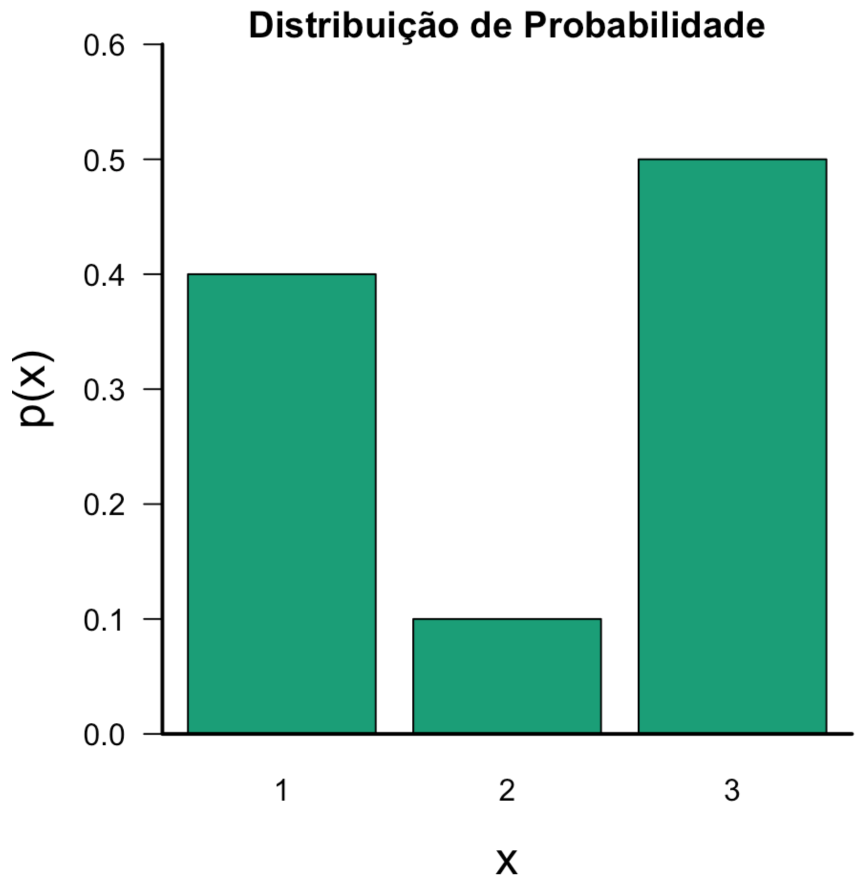
- **Variáveis aleatórias discretas:** v.a. com valores possíveis enumeráveis. Soma das probabilidades de todos os valores possíveis igual a 1.
- **Variáveis aleatórias contínuas:** v.a. com valores possíveis em um intervalo no conjunto de números reais.
- Exemplo: tempo para finalizar um experimento, peso de uma pessoa, duração de uma chamada telefônica, tempo de vida de uma lâmpada, etc…
- Para esses tipos de quantidades, não é possível associar frequências pontuais tais que a soma de todas seja igual a 1.
- Surge então o conceito de **"função de densidade de probabilidade"** (f.d.p.).
- Para cada v.a. contínua, associamos uma função de densidade de probabilidade.

Exemplo: v.a. discreta

Distribuição de probabilidade de uma $Bin(10, p)$, com $p = 0.2, 0.5$ e 0.8.

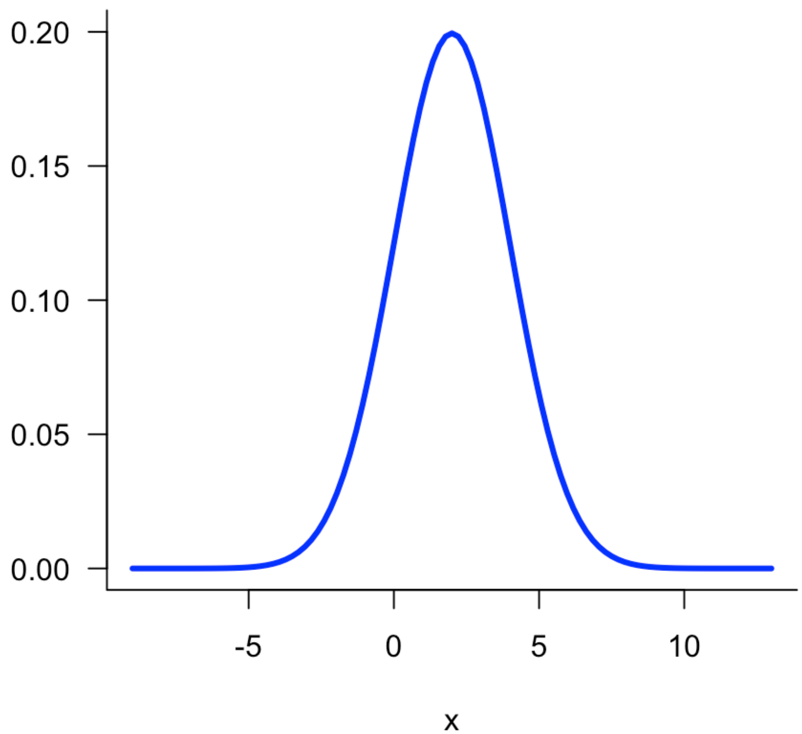


Exemplo: v.a. discreta

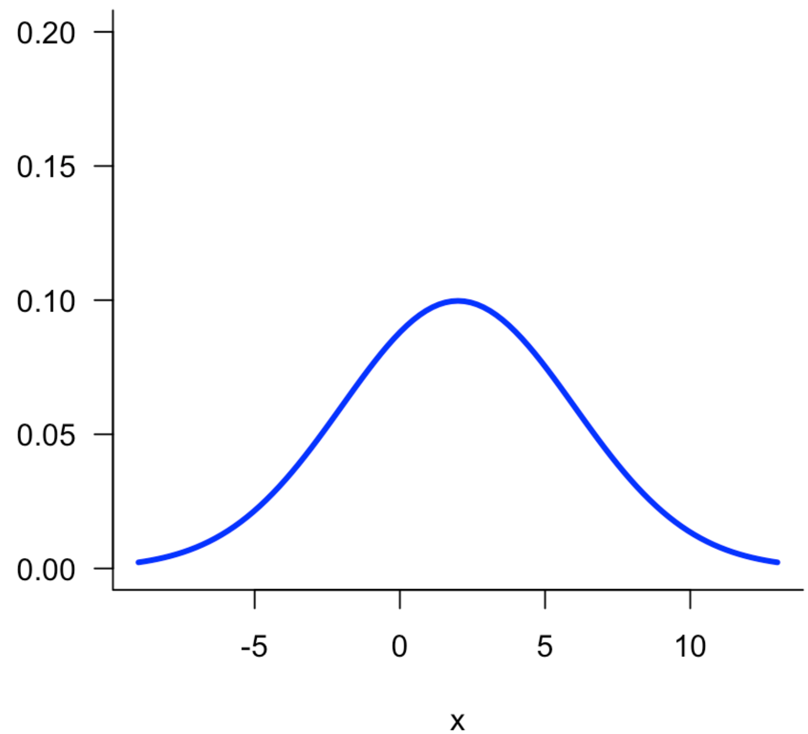


Exemplo: v.a. contínua

Média=2, DP=2



Média=2, DP=4



Variáveis Aleatórias Contínuas

Definição: a função de densidade de probabilidade de uma v.a. X é uma função f que verifica:

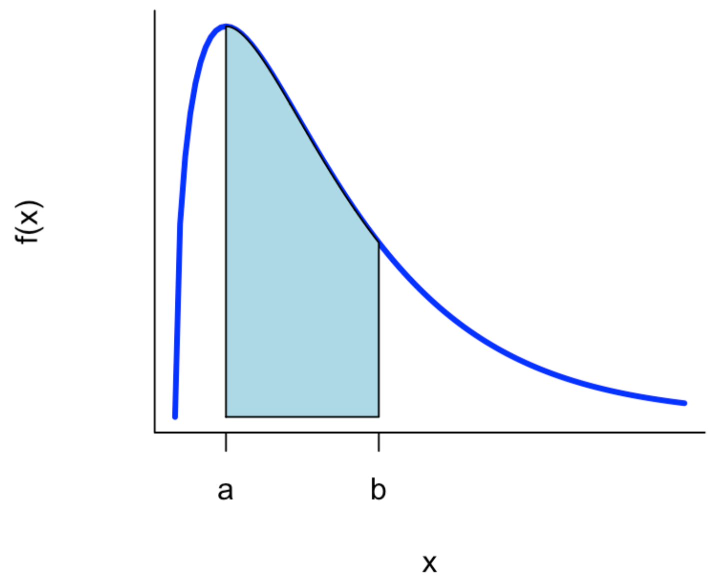
- $f(x) \geq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}$; e
- $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$ (f é integrável).

Toda v.a. X à qual seja possível associar uma função de densidade de probabilidade será chamada de v.a. contínua.

Variáveis Aleatórias Contínuas

A probabilidade de que uma v.a. X contínua pertença a um intervalo da reta (a,b], $a < b$ é dada por:

$$P(a < X \leq b) = \int_a^b f(x)dx.$$



Obs: Quando X é v.a. contínua $P(a < X \leq b) = P(a \leq X \leq b) = P(a < X < b) = P(a \leq X < b)$.

Variáveis Aleatórias Contínuas

Notação: se X v.a. contínua com função de densidade de probabilidade f, no lugar de f denotaremos f_X.

A probabilidade de que uma v.a. X contínua pertença ao intervalo da reta $(-\infty, x]$ daremos o nome de **função de distribuição acumulada** (f.d.a.), e a denotaremos por F_X

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(u)du.$$

Variáveis Aleatórias Contínuas

Exemplo: X v.a. contínua com função de densidade:

$$f_X(x) = \begin{cases} x & 0 \leq x < 1, \\ 2 - x & 1 \leq x \leq 2, \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Pela definição de função de densidade:

$$f_X(x) \geq 0, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$$

$$\int_0^2 f_X(x)dx = \int_0^1 xdx + \int_1^2 (2-x)dx = 1\,.$$

Podemos também calcular $P(0 < X \leq 0.8) = \displaystyle\int_0^{0.8} xdx = 0.32\,.$

Variáveis Aleatórias Contínuas

Propriedade: toda v.a. X contínua (ou seja, que possui f_X como função de densidade) tem probabilidade pontual nula: $P(X = x) = 0$.

A função de distribuição acumulada $F_X(x) = P(X \leq x)$:

- **caso discreto:**

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} P(X = x_i);$$

- **caso contínuo:**

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(u)du.$$

Exemplo

Dada a função

$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad x < 0, \\ 2e^{-2x} & \text{se} \quad x \geq 0. \end{cases}$$

1. Mostre que esta é uma função de densidade de probabilidade.
2. Calcule a probabilidade de $X > 10$.

Fonte: Morettin & Bussab, Estatística Básica 5^a edição, pág 166.

Exemplo

Item 1 - Mostre que esta é uma função de densidade de probabilidade.

Uma função de densidade de probabilidade deve satisfazer as seguintes propriedades:

1. $f_X(x) \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$; e
2. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)dx = 1.$

Note que e^{-x} é positiva para qualquer x e, consequentemente, $2e^{-2x}$ também.

Resta mostrar que sua integral é 1:

$$\int 2e^{-2x}dx = -e^{-2x}.$$

Exemplo

Note que a função está definida nesta forma para $x \geq 0$; para $x < 0$, ela é 0. Então, a integral é:

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)dx &= \int_{-\infty}^{0} 0dx + \int_{0}^{\infty} 2e^{-2x}dx \\
&= \left[-e^{-2x}\right]_0^{\infty} \\
&= \lim_{x\to\infty} -e^{-2x} - \left(-e^{-0}\right) = 1.
\end{aligned}$$

Item 2 - Calcule a probabilidade de $X > 10$.

A probabilidade é dada por:

$$P(X > 10) = \int_{10}^{\infty} 2e^{-2x}dx = \lim_{x\to\infty} -e^{-2x} - \left(-e^{-2\times 10}\right) = \frac{1}{e^{20}}.$$

Esperança

Definição: seja X uma v.a. contínua com densidade f_X, a **esperança** de X é dada por:

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx \,.$$

Definição: seja X uma v.a. contínua com densidade f_X, o k**-ésimo momento** de X é dado por:

$$\mathbb{E}(X^k) = \int_{-\infty}^{\infty} x^k f_X(x) dx \,.$$

Variância

Definição: seja X v.a. com valor esperado $\mathbb{E}(X)$, definimos por **variância**, a quantidade:

$$Var(X) = \mathbb{E}([X - \mathbb{E}(X)]^2) = \mathbb{E}(X^2) - [\mathbb{E}(X)]^2 .$$

E definimos como **desvio-padrão**:

$$\sigma = \sqrt{Var(X)} .$$

Note que assim como no caso discreto, ambas as quantidades oferecem medidas de dispersão da variável X em relação ao valor esperado $\mathbb{E}(X)$.

Exemplo

Para a função f_X seguinte, calcular $\mathbb{E}(X)$ e $Var(X)$:

$$f_X(x) = \begin{cases} x & 0 \leq x < 1, \\ 2 - x & 1 \leq x \leq 2, \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Exemplo

Para a função f_X seguinte, calcular $\mathbb{E}(X)$ e $Var(X)$:

$$f_X(x) = \begin{cases} x & 0 \leq x < 1, \\ 2 - x & 1 \leq x \leq 2, \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Solução:

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx = \int_0^1 x^2 dx + \int_1^2 x(2-x) dx = 1,$$

$$Var(X) = \int_{-\infty}^{\infty} [x - \mathbb{E}(X)]^2 f_X(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} (x-1)^2 f_X(x) dx = \frac{1}{6}.$$

Exemplo

Uma variável aleatória X tem distribuição triangular no intervalo $[0, 1]$ se sua f.d.p. for dada por

$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad x < 0, \\ Cx & \text{se} \quad 0 \leq x \leq 1/2, \\ C(1-x) & \text{se} \quad 1/2 \leq x \leq 1, \\ 0 & \text{se} \quad x > 1. \end{cases}$$

1. Qual valor deve ter a constante C?
2. Faça o gráfico de $f_X(x)$.
3. Determine $P(X \leq 1/2)$, $P(X > 1/2)$ e $P(1/4 \leq X \leq 3/4)$.

Fonte: Morettin & Bussab, Estatística Básica 5^a edição, pág 166.

Exemplo

Item 1 - Devemos escolher C de modo que $f(x)$ satisfaça:

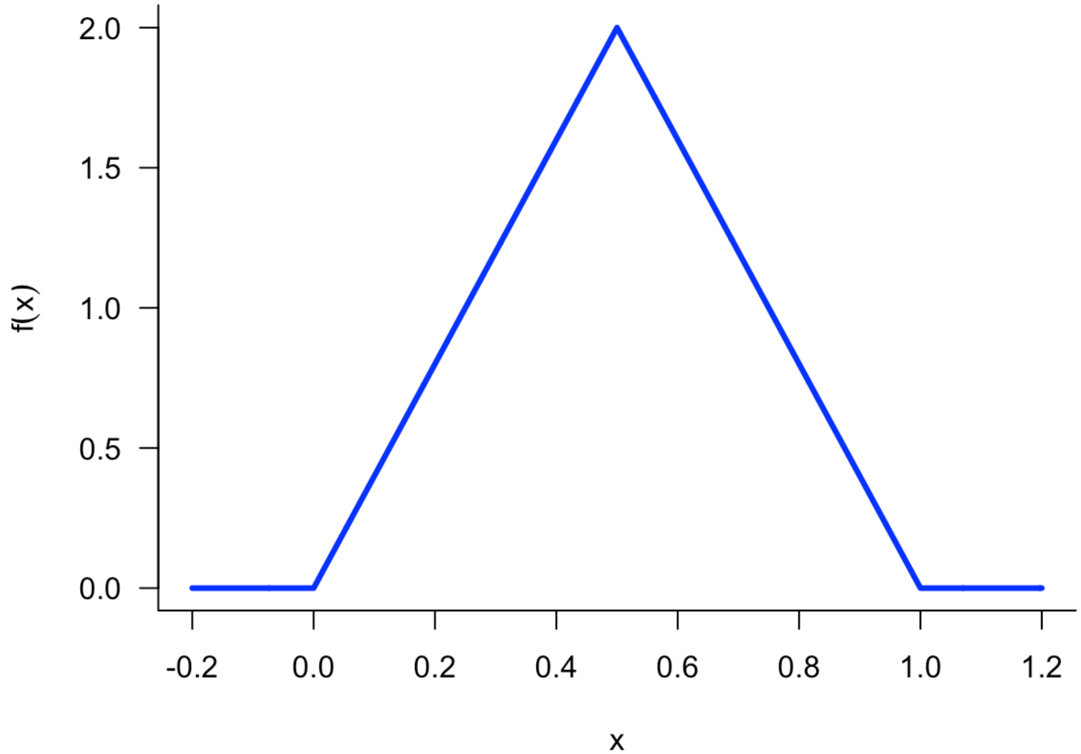
- $f_X(x) \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$; e
- $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)dx = 1$.

Pela primeira condição, temos que $C > 0$. Agora, para que C satisfaça a segunda condição, devemos integrar $f_X(x)$:

$$
\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)dx &= \int_{-\infty}^{0} 0dx + \int_{0}^{1/2} Cxdx + \int_{1/2}^{1} C(1-x)dx + \int_{1}^{\infty} 0dx \\
&= C\int_{0}^{1/2} xdx + C\int_{1/2}^{1} (1-x)dx = C\left(\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{1/2} + \left[x - \frac{x^2}{2}\right]_{1/2}^{1}\right) \\
&= C\left(\frac{1}{8} + 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{8}\right) = \frac{C}{4} \\
&\Rightarrow \frac{C}{4} = 1 \\
&\therefore C \text{ deve ser igual a 4.}
\end{aligned}
$$

Exemplo

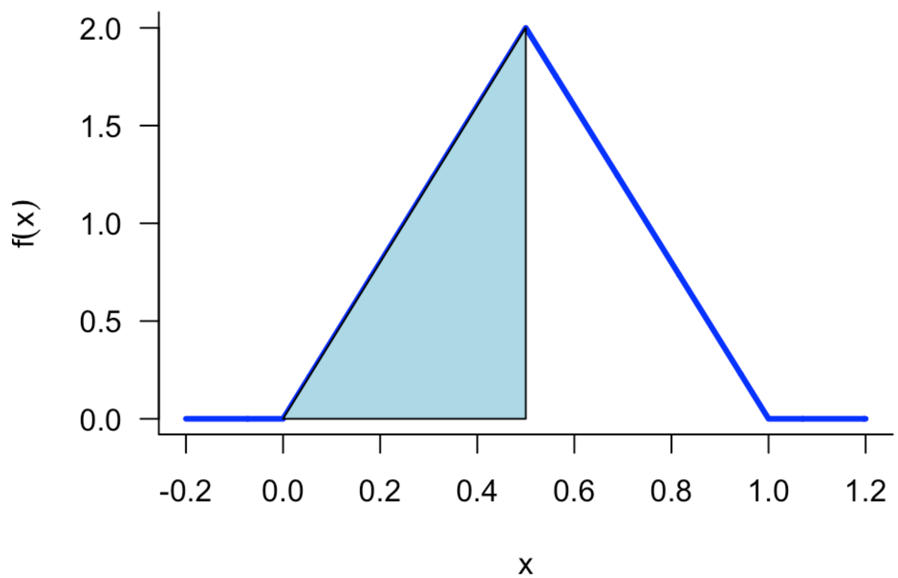
Item 2 - Função de densidade $f_X(x)$:



Exemplo

Item 3 - Para encontrarmos as probabilidades dos eventos, basta integrar nas regiões correspondentes:

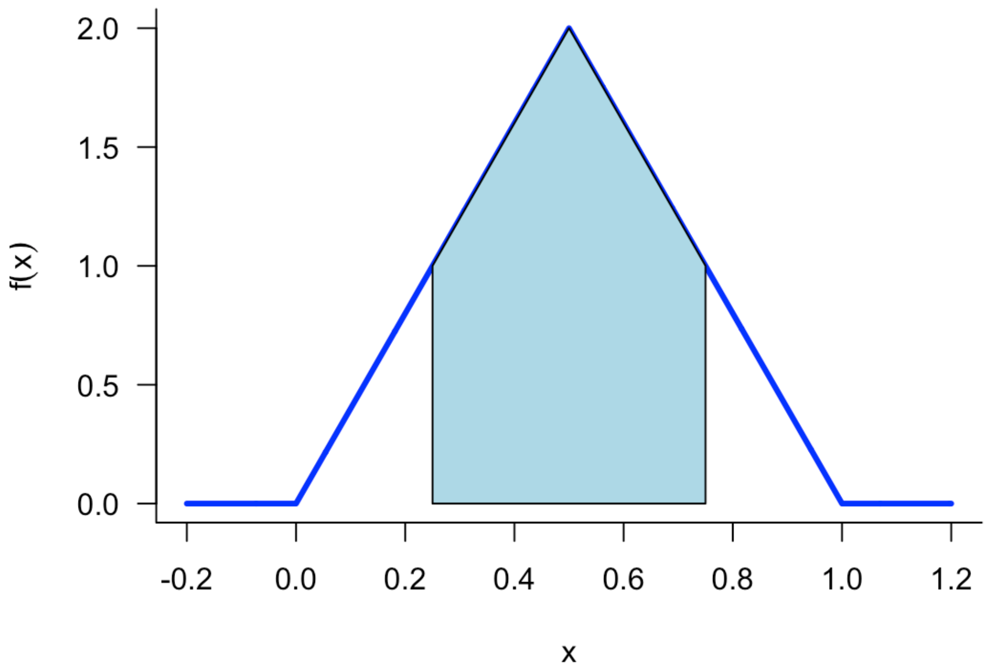
$$P(X \leq 1/2) = \int_0^{1/2} f_X(x)dx = \int_0^{1/2} 4xdx = 1/2\,.$$



Note que $P(X > 1/2) = 1 - P(X \leq 1/2) = 1 - 1/2 = 1/2$.

Exemplo

$$P(1/4 \leq X \leq 3/4) = \int_{1/4}^{3/4} f_X(x)dx = \int_{1/4}^{1/2} 4xdx + \int_{1/2}^{3/4} 4(1-x)dx = \frac{3}{4}\,.$$



Exemplo

Calcule a esperança, a variância e a f.d.a. da variável aleatória X com a densidade triangular em $[0, 1]$.

Fonte: Morettin & Bussab, Estatística Básica 5^a edição, pág 171.

Exemplo

Calcule a esperança, a variância e a f.d.a. da variável aleatória X com a densidade triangular em $[0, 1]$.

Fonte: Morettin & Bussab, Estatística Básica 5^a edição, pág 171.

Temos que,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)dx = \int_0^{1/2} x4xdx + \int_{1/2}^{1} x4(1-x)dx \\ &= \left[\frac{4x^3}{3}\right]_0^{1/2} + \left[\frac{2}{3}x^2(3-2x)\right]_{1/2}^{1} = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Exemplo

E,

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Var}(X) &= \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mathbb{E}(X))^2 f_X(x) dx \\
&= \int_{0}^{1/2} \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 4x dx + \int_{1/2}^{1} \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 4(1-x) dx \\
&= \left[x^4 - \frac{4}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2\right]_0^{1/2} + \left[-x^4 + \frac{8}{3}{}^3 - \frac{5}{2}x^2 + x\right]_{1/2}^{1} \\
&= \frac{1}{24}.
\end{aligned}
$$

Exemplo

A função de distribuição acumulada de uma variável aleatória contínua é dada por

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt.$$

Temos que para $x \in [0, 1/2)$, $F_X(x)$ é dada por

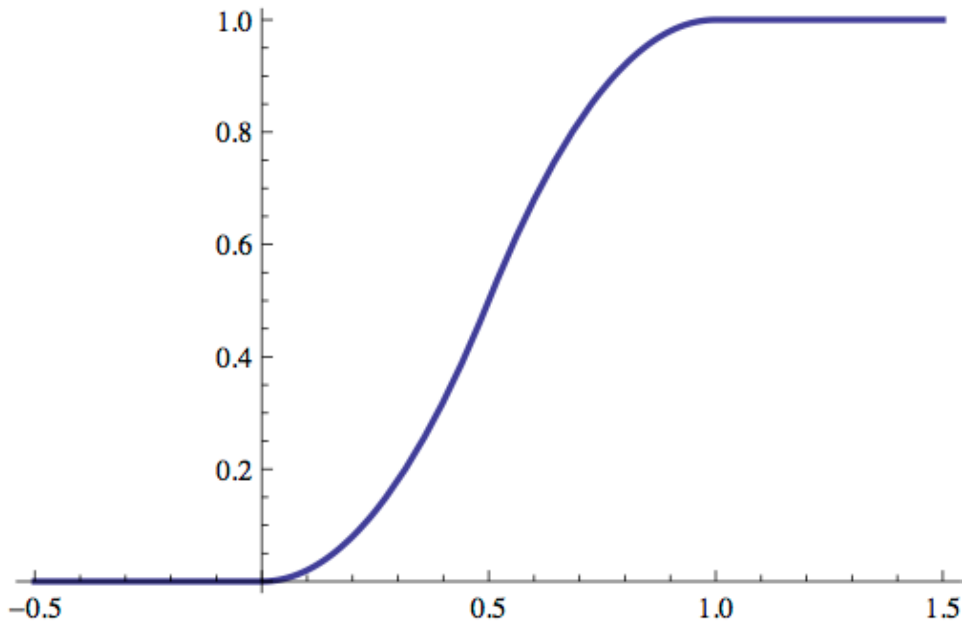
$$F_X(x) = \int_0^x 4tdt = 2x^2.$$

Para $x \in [1/2, 1]$, a acumulada é dada por

$$F_X(x) = \int_0^{1/2} 4tdt + \int_{1/2}^{x} 4(1-t)dt = -2x^2 + 4x - 1.$$

Exemplo

Para valores de $x \geq 1$, a acumulada assume valor 1. O gráfico de $F_X(x)$ é dado por:



Distribuição Uniforme

Uniforme

Dizemos que a v.a. X tem distribuição Uniforme no intervalo $[a, b]$, $a < b$ se a função de densidade de probabilidade f_X é dada por:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & a \leq x \leq b, \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

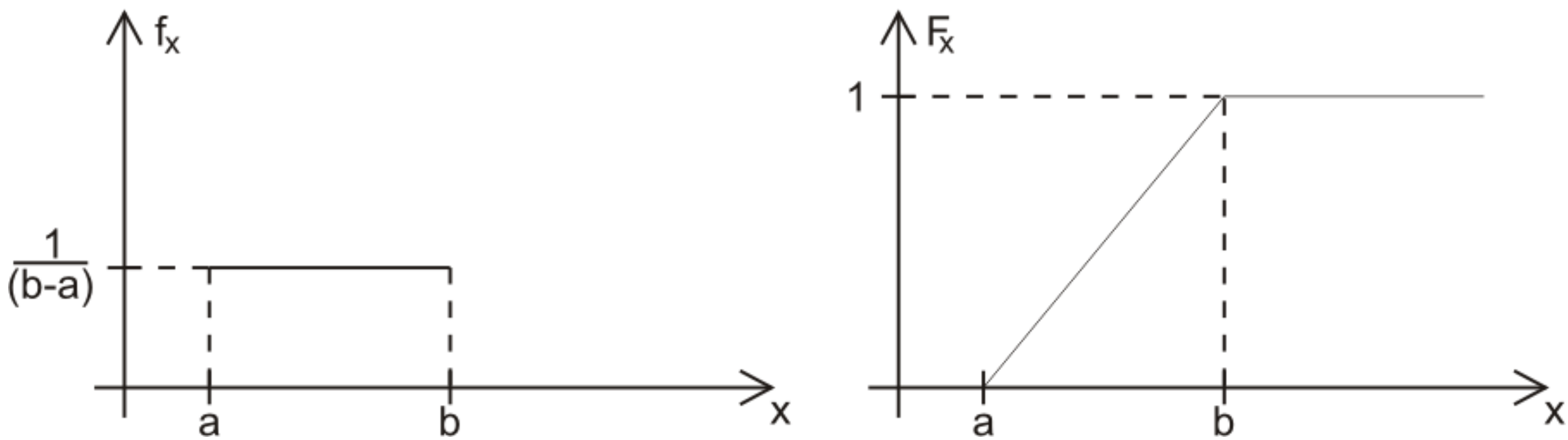
Notação: $X \sim U[a, b]$ ou $X \sim U(a, b)$.

A função de distribuição acumulada é dada por

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < a, \\ \int_a^x \frac{1}{b-a} dt = \frac{x-a}{b-a} & a \leq x \leq b, \\ 1 & x > b. \end{cases}$$

Uniforme

Gráficos da função de densidade de probabilidade e da função de distribuição acumulada:



Esperança e Variância

- Cálculo da $\mathbb{E}(X)$:

$$\mathbb{E}(X) = \int_a^b x \frac{1}{(b-a)} dx = \frac{(b+a)}{2}.$$

- Cálculo da $Var(X)$:

$$\mathbb{E}(X^2) = \int_a^b x^2 \frac{1}{(b-a)} dx = \frac{(a^2+ab+b^2)}{3},$$

$$\begin{aligned} Var(X) &= \mathbb{E}(X^2) - [\mathbb{E}(X)]^2 \\ &= \frac{(a^2+ab+b^2)}{3} - \frac{(b+a)^2}{4} = \frac{(b-a)^2}{12}. \end{aligned}$$

Exemplo: peça de aço

A dureza H de uma peça de aço pode ser pensada como uma v.a. com distribuição uniforme no intervalo $[50, 70]$ da escala de Rockwel. Calcule a probabilidade de que uma peça tenha dureza entre 55 e 60.

Exemplo: peça de aço

A dureza H de uma peça de aço pode ser pensada como uma v.a. com distribuição uniforme no intervalo $[50, 70]$ da escala de Rockwel. Calcule a probabilidade de que uma peça tenha dureza entre 55 e 60.

A densidade de uma $U[50, 70]$ é dada por:

$$f_H(h) = \begin{cases} \frac{1}{70-50} = \frac{1}{20} & 50 \leq x \leq 70, \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Portanto, a probabilidade de uma peça ter dureza entre 55 e 60 é:

$$P(55 < H < 60) = \int_{55}^{60} \frac{1}{20} dh = \frac{1}{20}(60 - 55) = \frac{1}{4} \, .$$

Exemplo

Seja X uma variável aleatória distribuída uniformemente, com média 15 e variância 25/3.

- Encontre a função de densidade de X.
- Qual é a probabilidade que $X > 14$?

Exemplo

Lembre-se que a esperança de uma v.a. uniforme em $[a, b]$ é dada por

$$\mathbb{E}(X) = \frac{a+b}{2},$$

e sua variância por

$$\mathrm{Var}(X) = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

Temos, portanto, o seguinte sistema:

$$\begin{cases} \frac{a+b}{2} & = & 15 \\ \frac{(b-a)^2}{12} & = & \frac{25}{3} \end{cases} \implies \begin{cases} a+b & = & 30 \\ (b-a)^2 & = & 100 \end{cases}$$

Exemplo

Ou simplesmente (você é capaz de dizer por que tomamos a raiz positiva apenas, neste sistema não-linear?)

$$\begin{cases} a+b &= 30 \\ b-a &= 10 \end{cases}$$

O sistema tem solução $a = 10$, $b = 20$, o que nos mostra que $X \sim U[10, 20]$ e

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{10}, & 10 \leq x \leq 20; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Então, a probabilidade de $X > 14$ é dada por

$$P(X > 14) = \int_{14}^{20} \frac{1}{10} dx = \frac{(20-14)}{10} = 0.6\,.$$

Distribuição Exponencial

Distribuição Exponencial

Dizemos que uma v.a. X possui distribuição exponencial com parâmetro λ ($\lambda > 0$) se a função de densidade de probabilidade f_X é dada por:

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & x \geq 0, \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

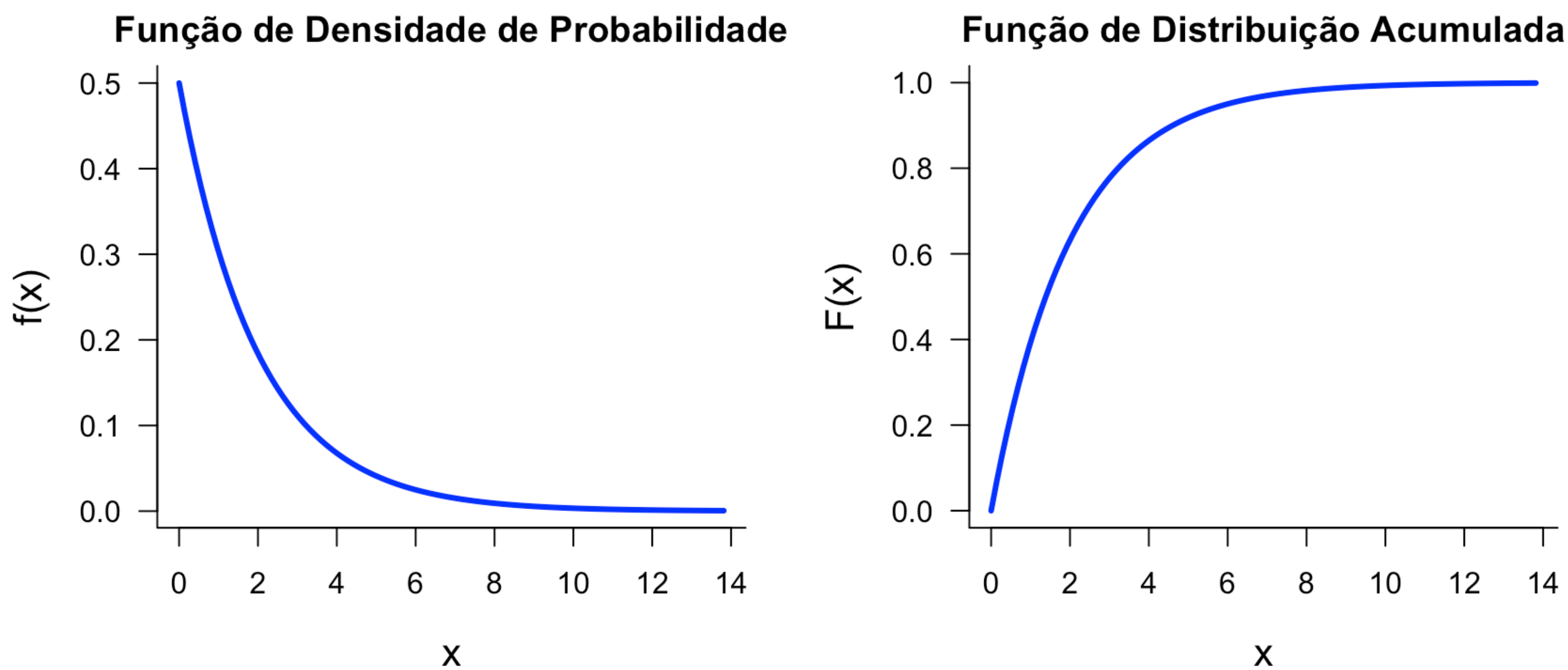
Notação: $X \sim Exp(\lambda)$.

Cálculo da função de distribuição acumulada:

$$F_X(x) = \begin{cases} \int_0^x \lambda e^{-\lambda t} dt = 1 - e^{-\lambda x} & x \geq 0, \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Distribuição Exponencial

Gráficos da função de densidade de probabilidade (esquerda) e da função de distribuição acumulada (direita) de $X \sim Exp(0.5)$:



Esperança e Variância

- Cálculo da $\mathbb{E}(X)$:

$$\mathbb{E}(X) = \int_0^\infty x\lambda e^{-\lambda x} dx = \frac{1}{\lambda}\,.$$

- Cálculo da $Var(X)$:

$$\mathbb{E}(X^2) = \int_0^\infty x^2\lambda e^{-\lambda x} dx = \frac{2}{\lambda^2},$$

$$Var(X) = \mathbb{E}(X^2) - [\mathbb{E}(X)]^2 = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}\,.$$

Exemplo: componente eletrônico

O tempo de vida, X, em horas, de um componente eletrônico segue uma distribuição exponencial de tal forma que $P(X \leq 1000) = 0.75$.

Qual é o tempo médio de vida do componente?

Exemplo: componente eletrônico

Sabemos que se $X \sim Exp(\lambda)$, então

$$F_X(x) = P(X \leq x) = 1 - e^{-\lambda x}$$

e $\mathbb{E}(X) = \lambda^{-1}$.

Basta então observarmos que

$$P(X \leq 1000) = 1 - e^{-\lambda 1000} = 0.75 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = \frac{\ln(4)}{1000} = 0.0013863\,.$$

Concluimos então que o tempo médio de vida, $\mathbb{E}(X)$, é igual a $1/0.0013863 = 721.35$ horas, e que 75% dos componentes duram 1000 horas ou menos.

Exemplo: tubos de TV

Um antiga fábrica de tubos de TV determinou que a vida média dos tubos de sua fabricação é de 800 horas de uso contínuo e segue uma distribuição exponencial.

Qual a probabilidade de que a fábrica tenha que substituir um tubo gratuitamente, se oferece uma garantia de 300 horas de uso?

Exemplo: tubos de TV

X: vida útil do tubo de TV.

Como X tem distribuição exponencial com parâmetro λ e $\mathbb{E}[X] = 800$, temos:

$$\mathbb{E}[X] = \frac{1}{\lambda} = 800 \qquad \Longrightarrow \qquad \lambda = \frac{1}{800}.$$

Então, a f.d.p. é dada por
$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{800} e^{-\frac{x}{800}}, & x \geq 0; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Se $X < 300$, a fábrica tem que substituir gratuitamente.

$$P(X < 300) = \int_0^{300} \frac{1}{800} e^{-\frac{x}{800}} dx = \left[-e^{-\frac{x}{800}} \right]_0^{300} = 0.3127\,.$$

Exemplo: produto alimentício

A f.d.p.

$$f_X(x) = \begin{cases} 2e^{-2x} & x \geq 0, \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

representa a distribuição do índice de acidez (X) de um determinado produto alimentício.

O produto é consumível se este índice for menor do que 2.

O setor de fiscalização apreendeu 30 unidades do produto. Qual a probabilidade de que pelo menos 10% da amostra seja imprópria para consumo?

Exemplo: produto alimentício

Produto liberado para consumo se: $P(X < 2) = \int_0^2 2e^{-2x}dx = \left[-e^{-2x}\right]_0^2 = 0.98.$

Produto não consumível com probabilidade $1 - P(X < 2) = 0.02 = p$.

Seja Y: número de unidades impróprias para consumo na amostra de 30.

Então,

$$Y \sim \text{Bin}(30, 0.02).$$

Probabilidade de que pelo menos 10% de uma amostra de 30 unidades seja imprópria:

$$\begin{aligned} P(Y \geq 3) &= 1 - P(Y < 3) \\ &= 1 - [P(Y = 0) + P(Y = 1) + P(Y = 2)] \\ &= 1 - \left[\binom{30}{0}(0.02)^0(0.98)^{30} + \binom{30}{1}(0.02)^1(0.98)^{29} + \binom{30}{2}(0.02)^2(0.98)^{28}\right] \\ &= 0.022\,. \end{aligned}$$

Distribuição Gama

Distribuição Gama

Dizemos que uma v.a. X tem distribuição Gama com parâmetros $\alpha > 0$ (também denominado parâmetro de forma) e $\beta > 0$ (parâmetro de taxa), se sua função densidade é dada por

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x}, \text{ se } x \geq 0 \\ 0, \text{ caso contrário} \end{cases}$$

Notação: $X \sim \text{ Gama}(\alpha, \beta)$.

A distribuição gama é uma das mais gerais distribuições, pois diversas distribuições são caso particular dela como por exemplo a exponencial, a qui-quadrado, entre outras. Essa distribuição tem como suas principais aplicações à análise de tempo de vida de produtos.

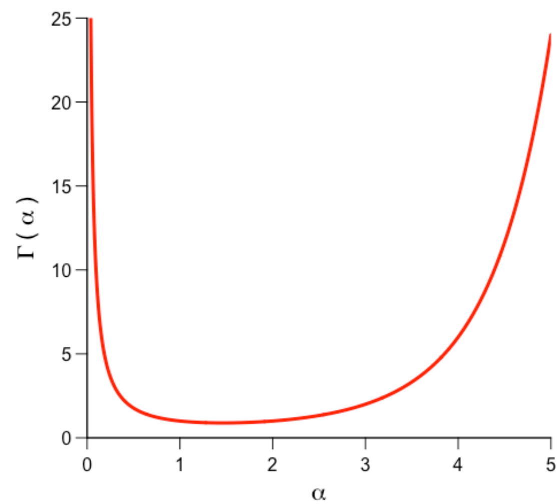
Distribuição Gama

A função gama é definida por $\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1}e^{-x}\mathrm{d}x, \quad \text{para } \alpha > 0.$

Temos que, $\Gamma(\alpha) = (\alpha - 1)\Gamma(\alpha - 1)$.

Se α é um número natural, então $\Gamma(\alpha) = (\alpha - 1)!$.

A função de distribuição acumulada é a função gama regularizada:

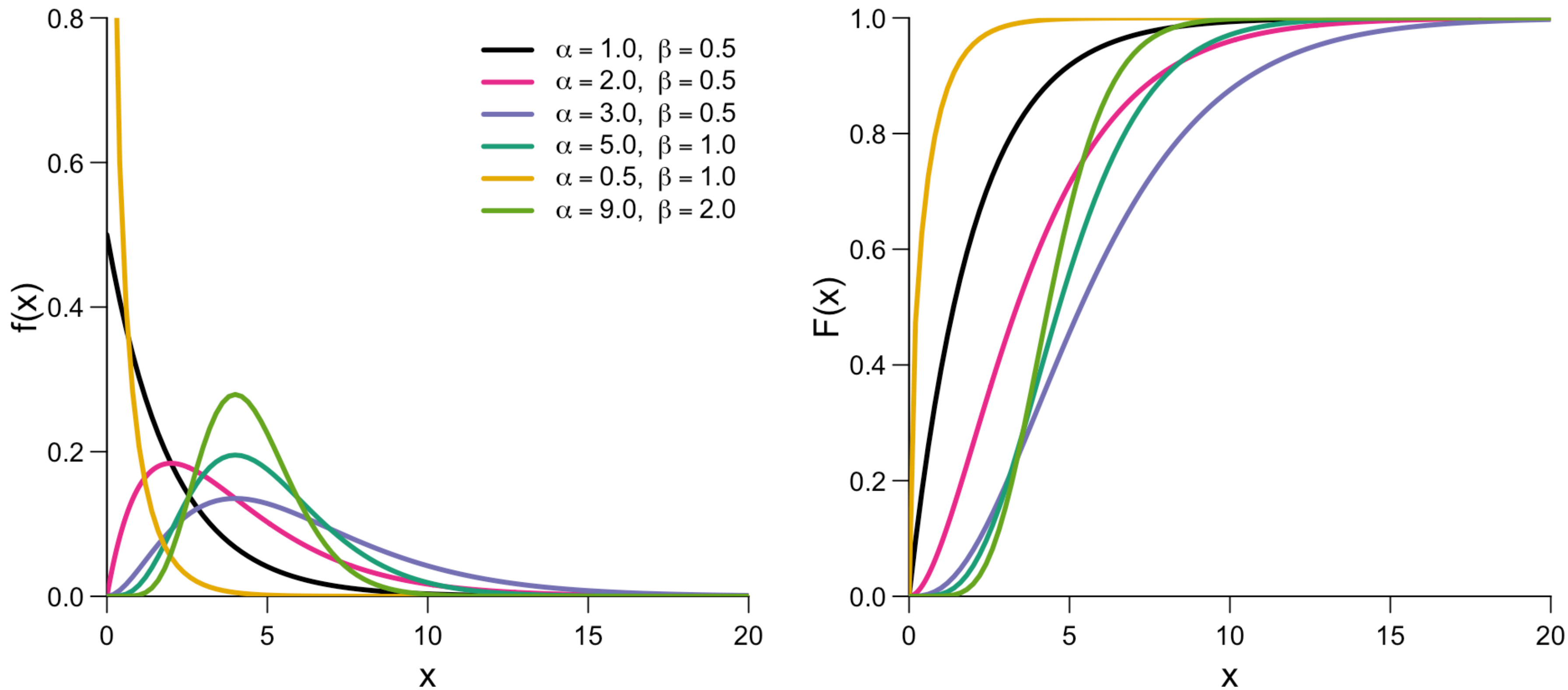


$$
\begin{aligned}
F_X(x; \alpha, \beta) &= \int_0^x f_X(u; \alpha, \beta)\, du \\
&= \frac{\gamma(\alpha, \beta x)}{\Gamma(\alpha)},
\end{aligned}
$$

onde $\gamma(\alpha, \beta x)$ é a função gama incompleta inferior.

Distribuição Gama

Gráficos da função de densidade de probabilidade e da função de distribuição acumulada:



Distribuição Gama

Como dito anteriormente, há uma relação estreita entre a distribuição exponencial e a distribuição gama. Temos que, se $\alpha = 1$ a distribuição gama se reduz à distribuição exponencial.

Se a variável aleatória X é a soma de α variáveis aleatórias independentes, distribuídas exponencialmente cada uma com parâmetro β, então X tem uma densidade Gama com parâmetros α e β. Seja

$$Y_i \sim \text{Exp}(\beta), \text{ com } i = 1, \cdots, \alpha \text{ e } \alpha \text{ sendo um inteiro positivo.}$$

Então,

$$X = \sum_{i=1}^{\alpha} Y_i \sim \text{Gama}(\alpha, \beta).$$

Esperança de Variância

- Cálculo da $\mathbb{E}(X)$:

$$\mathbb{E}(X) = \frac{\alpha}{\beta}.$$

- Cálculo da $Var(X)$:

$$Var(X) = \mathbb{E}(X^2) - [\mathbb{E}(X)]^2 = \frac{\alpha(\alpha+1)}{\beta^2} - \frac{\alpha^2}{\beta^2} = \frac{\alpha}{\beta^2}.$$

Demontração: Seja $Y_i \sim \mathrm{Exp}(\beta)$, com $i = 1, \cdots, \alpha$ e α um inteiro positivo.

$$\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(\textstyle\sum_{i=1}^{\alpha} Y_i) = \sum_{i=1}^{\alpha} \mathbb{E}(Y_i) = \sum_{i=1}^{\alpha} \frac{1}{\beta} = \frac{\alpha}{\beta};$$

$$Var(X) = Var(\textstyle\sum_{i=1}^{\alpha} Y_i) = \sum_{i=1}^{\alpha} Var(Y_i) = \sum_{i=1}^{\alpha} \frac{1}{\beta^2} = \frac{\alpha}{\beta^2}.$$

Exemplo

Suponha que o tempo gasto por um funcionário selecionado aleatoriamente para realizar uma tarefa em uma empresa tem uma distribuição gama com média 20 minutos e variância de 80 minutos^2.

1. Quais são os parâmetros da distribuição gama utilizada?
2. Qual é a probabilidade de um funcionário realizar a tarefa em no máximo 24 minutos?
3. Qual é a probabilidade de um funcionário passar entre 20 e 40 minutos realizando a tarefa?

Exemplo

Item 1 - Seja T = tempo gasto para realizar a tarefa, $T \sim \text{Gama}(\alpha, \beta)$.

Lembre-se que a esperança de uma v.a. Gama é dada por $\mathbb{E}(T) = \frac{\alpha}{\beta}$ e sua variância por $\text{Var}(T) = \frac{\alpha}{\beta^2}$.

Temos o seguinte sistema,

$$\begin{cases} \frac{\alpha}{\beta} & = & 20 \\ \frac{\alpha}{\beta^2} & = & 80 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha & = & 20\beta \\ \frac{20\beta}{\beta^2} & = & 80 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 20 = 80\beta$$

$$\Rightarrow \beta = \frac{20}{80} = \frac{1}{4} = 0,25$$

$$\Rightarrow \alpha = 20\beta = 20 * 0,25 = 5$$

$$\Rightarrow T \sim \text{Gama}(5, 0,25)$$

Exemplo

Item 2 - A probabilidade de um funcionário realizar a tarefa em no máximo 24 minutos, é dada por

$$P(X \leq 24) = \frac{\gamma(5,6)}{\Gamma(5)} = \frac{17.1586440}{24} = 0.7149435$$

Item 3 - A probabilidade de um funcionário passar entre 20 e 40 minutos realizando a tarefa é dada por

$$\begin{aligned} P(20 < X < 40) =& P(X \leq 40) - P(X \leq 20) \\ =& \frac{\gamma(5,10)}{\Gamma(5)} - \frac{\gamma(5,5)}{\Gamma(5)} \\ =& \frac{23.2979355}{24} - \frac{13.4281612}{24} = 0.4112406 \end{aligned}$$

Exercício

Para cada cliente que entra na fila do caixa de uma loja de roupas:

1. O tempo de espera na fila segue uma distribuição de probabilidade exponencial com média de 5 minutos;

2. O tempo de atendimento segue uma distribuição de probabilidade exponencial com média de 3 minutos;

Sabendo que esses dois tempos são v.a.'s independentes.

Para a variável T= tempo total do cliente no caixa (incluindo a espera na fila e o atendimento), determine a densidade, a esperança e o desvio padrão.

Distribuição Gama

Relação entre a distribuição Poisson e a distribuição Gamma:

Teorema: Se o número de ocorrências de um processo de contagem segue distribuição de Poisson(λ), então a variável aleatória "Tempo até a n-ésima ocorrência" do referido processo tem distribuição Gama(n,λ).

Exercício: As falhas em CPU's de computadores usualmente são modeladas por processos de Poisson. Isso porque, tipicamente, as falhas não são causadas por desgaste, mas por eventos externos ao sistema. Assuma que as unidades que falham sejam imediatamente reparadas e que o número médio de falhas por hora seja 0,0001. Determine a probabilidade de que o tempo até a quarta falha exceda 40.000 horas.

Distribuição Beta

Distribuição Beta

Dizemos que uma v.a. X tem distribuição Beta com parâmetros $\alpha > 0$ e $\beta > 0$, se sua função densidade é dada por

$$f_X(x) = \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}, \quad x \in (0,1) \text{ e } \alpha, \beta > 0$$

Notação: $X \sim \text{ Beta}(\alpha, \beta)$.

Os parâmetros α e β definem a forma da distribuição. Se $\alpha = \beta$, a distribuição é simétrica, se $\alpha > \beta$, a assimetria é negativa e, no caso de $\alpha < \beta$, sua assimetria é positiva.

A distribuição Beta é frequentemente usada para modelarmos a proporção, ou modelagem de objetos que pertenceção ao intervalo $(0, 1)$, pois essa distribuição está definida neste intervalo.

Distribuição Beta

A função distribuição acumulada é

$$F_X(x;\alpha,\beta) = \frac{\mathrm{B}(x;\alpha,\beta)}{\mathrm{B}(\alpha,\beta)} = \frac{\int_0^x t^{a-1}\,(1-t)^{b-1}\,dt}{B(\alpha,\beta)} = I_x(\alpha,\beta),$$

onde $\mathrm{B}(x;\alpha,\beta)$ é a função beta incompleta e $I_x(\alpha,\beta)$ é a função beta incompleta regularizada.

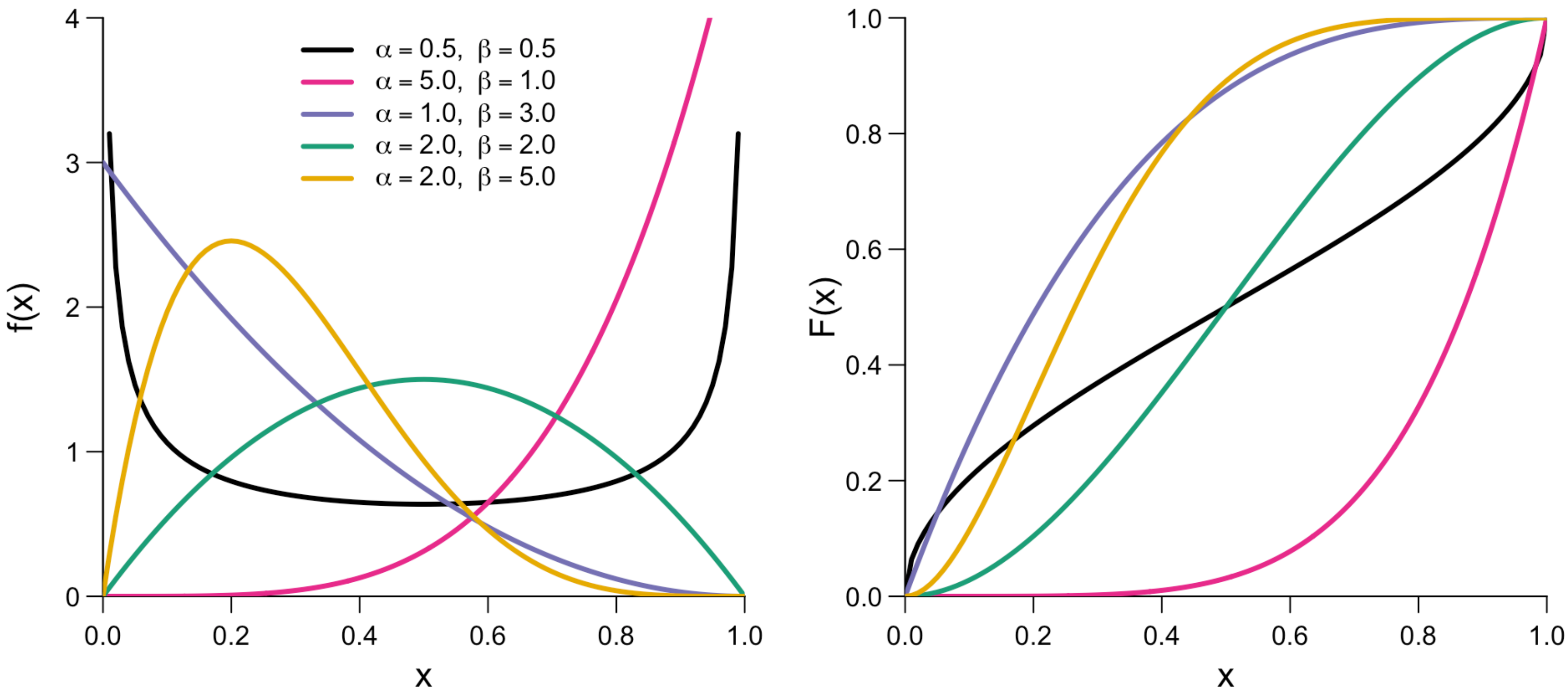
- Esperança e Variância:

$$\mathbb{E}(X) = \frac{\alpha}{\alpha+\beta},$$

$$Var(X) = \mathbb{E}(X^2) - [\mathbb{E}(X)]^2 = \frac{\alpha(\alpha+1)}{(\alpha+\beta)(\alpha+\beta+1)} - \frac{\alpha^2}{(\alpha+\beta)^2} = \frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta+1)(\alpha+\beta)^2}.$$

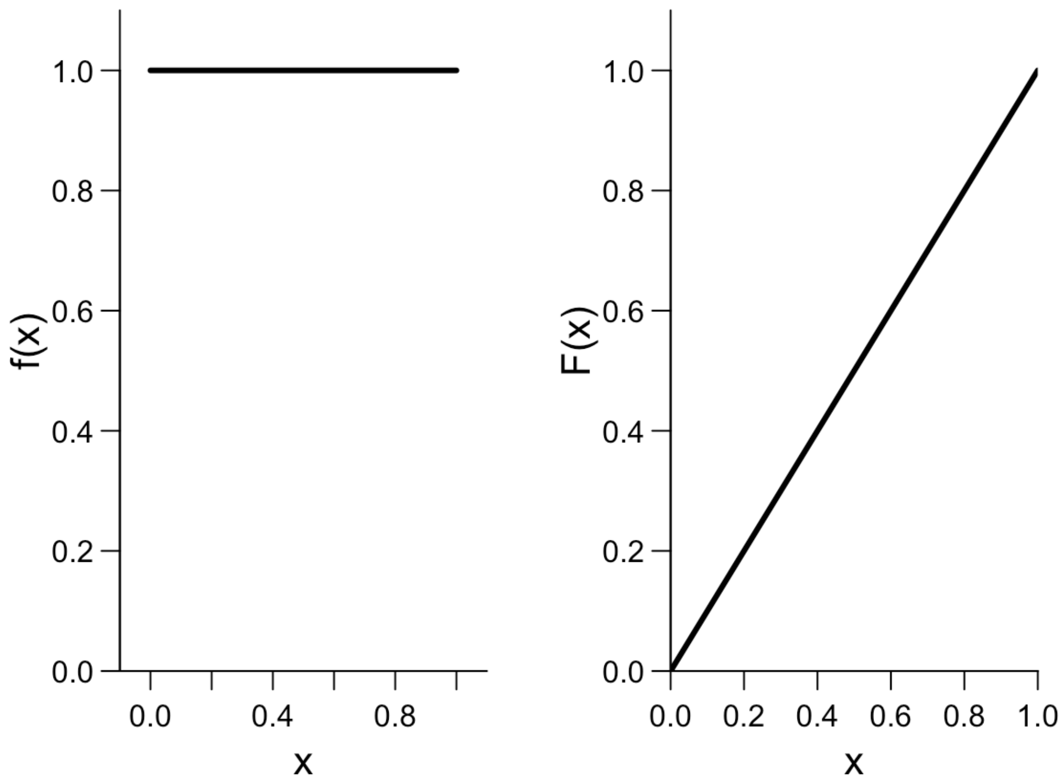
Distribuição Beta

Gráficos da função de densidade de probabilidade e da função de distribuição acumulada:



Distribuição Beta

Caso paticular: se $\alpha = \beta = 1$, a densidade de Beta se reduz à Uniforme no intervalo $(0, 1)$.



Exemplo

A percentagem de impurezas por lote, em um determinado produto químico, é uma variável aleatória com distribuição Beta de parâmetros $\alpha = 3$ e $\beta = 2$. Um lote com mais de 40% de impurezas não pode ser vendido.

1. Qual é a probabilidade de que um lote selecionado ao acaso não poder ser vendidos por causa do excesso de impurezas?

2. Quantos lotes em média são selecionados ao acaso até que se encontre um que não pode ser vendidos por causa do excesso de impurezas?

3. Qual a porcentagem média de impurezas nos lotes desse produto químico?

Exemplo

Item 1 - Seja X=percentagem de impurezas em um lote. Queremos encontrar $P(X > 0,4)$.

Pelo enunciado temos que $X \sim \text{Beta}(3,2)$. Então, a função densidade de X, para $0 < x < 1$, é dada por:

$$f_X(x) = \frac{\Gamma(5)}{\Gamma(3)\Gamma(2)} x^2(1-x), \quad x \in (0,1)$$

$$\Rightarrow f_X(x) = 12x^2(1-x), \quad x \in (0,1)$$

Então,

$$P(X > 0,4) = \int_{0,4}^{1} 12x^2(1-x)\mathrm{d}x = 12\int_{0,4}^{1} x^2 - x^3\mathrm{d}x = 0,8208$$

Exemplo

Item 2 - Seja Y = números de lotes selecionados ao acaso até que se encontre um que não pode ser vendido por excesso de impureza.

Queremos $\mathbb{E}(Y)$.

Temos que Y tem distribuição geométrica, ou seja, $Y \sim \mathrm{G}(p = 0,8208)$.

Então,

$$\mathbb{E}(Y) = \frac{1}{p} = \frac{1}{0{,}8208} = 1,218.$$

Item 3 - Queremos calcular $\mathbb{E}(X)$.

Como $X \sim \mathrm{Beta}(3,2)$, sabemos que $\mathbb{E}(X) = \frac{\alpha}{\alpha+\beta} = \frac{3}{5} = 0,6.$

Ou seja, a porcentagem média de impurezas nos lotes desse produto químico é de 60%.

Leituras

- Ross: seções 6.1 e 6.2.
- Magalhães: capítulo 6.

Slides produzidos pelos professores:

- Samara Kiihl
- Tatiana Benaglia
- Larissa Matos
- Benilton Carvalho