ME951 - Estatística e Probabilidade I

Parte 7

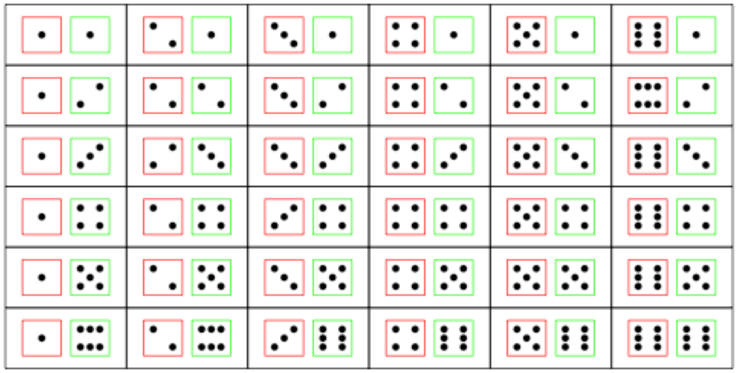
1S2024

Probabilidade Condicional e Independência

Probabilidade Condicional

Probabilidade Condicional: encontrar a probabilidade de um evento quando você tem alguma outra informação sobre o evento.

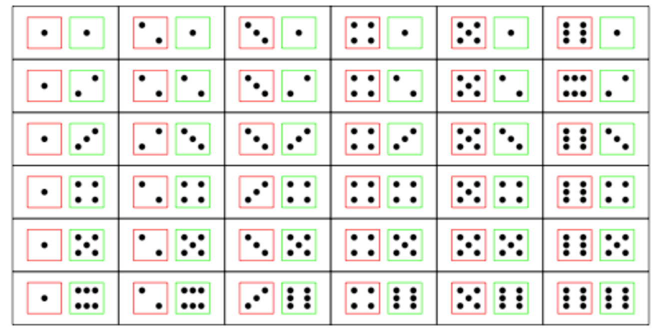
- Considere o lançamento de dois dados. Espaço amostral na figura abaixo.
- Considere que cada resultado tenha a mesma chance de ocorrer: 1/36.
- Suponha que você lance primeiro um dos dados e o resultado é 4.
- Qual a probabilidade de que a soma dos resultados dos dois dados seja 10?



Probabilidade Condicional

Como saiu 4 no primeiro dado, há 6 resultados possíveis:

$$\Omega_1 = \{(4,1),(4,2),(4,3),(4,4),(4,5),(4,6)\}$$



Cada resultado tem a mesma probabilidade de ocorrer: 1/6.

Dado que o primeiro dado teve resultado 4,
então a probabilidade de cada evento em Ω_1 tem igual chance de ocorrer.

Considere os eventos:
B = {a soma dos dados é igual a 10}
A = {no primeiro dado saiu 4}

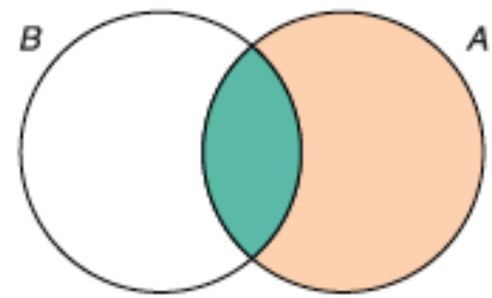
Definimos a **probabilidade condicional de B dado A** por:

$$P(B \mid A)$$

Probabilidade Condicional

Suponha que o resultado do experimento esteja contido no evento A.

Para que o resultado esteja também no evento B, ele precisa necessariamente estar tanto em A quanto em B, ou seja, precisa estar em $A \cap B$.



Mas, como sabíamos desde o início que o resultado estava em A, nosso espaço amostral agora é reduzido para somente os elementos de A e então:

$$P(B \mid A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Exemplo: Lançamento de dois dados

Voltando ao exemplo dos dois dados.

- Seja o evento A = {no primeiro dado saiu 4}.

$$A = \{(4,1),(4,2),(4,3),(4,4),(4,5),(4,6)\}$$

- Seja o evento B = {a soma dos dados é igual a 10}

$$B = \{(4,6),(5,5),(6,4)\}$$

- Então $A \cap B = \{(4,6)\}$. Portanto:

$$P(B \mid A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{1/36}{6/36} = \frac{1}{6}$$

Exemplo: Qual a chance de cair na malha fina?

80.2 milhões de declarações.

Renda x Caiu na Malha Fina?

	Sim	Não	Total
D - abaixo de 25.000	90	14010	14100
C - 25.000 a 49.999	71	30629	30700
B - 50.000 a 99.999	69	24631	24700
A - acima de 100.000	80	10620	10700
Total	310	79890	80200

Para simplificar, uma frequência de 90 representa 90.000.

Exemplo: Qual a chance de cair na malha fina?

Espaço amostral:

$$\begin{aligned}\Omega = \{ &(\text{A, sim}), (\text{A, não}), (\text{B, sim}), (\text{B, não}),\\ &(\text{C, sim}), (\text{C, não}), (\text{D, sim}), (\text{D, não})\}\end{aligned}$$

Qual a probabilidade de cair na malha fina se a renda for acima de 100.000?

Exemplo: Qual a chance de cair na malha fina?

Espaço amostral:

$$\Omega = \{ \text{(A, sim), (A, não), (B, sim), (B, não),} \\ \text{(C, sim), (C, não), (D, sim), (D, não)} \}$$

Qual a probabilidade de cair na malha fina se a renda for acima de 100.000?

Considere os eventos:

- $\mathcal{A}$ = {caiu na malha fina} $=\{\text{(A, sim), (B, sim), (C, sim), (D, sim)}\}$
- $\mathcal{B}$ = {renda acima de 100.000} $=\{\text{(A, sim), (A, não)}\}$

$$P(\mathcal{A} \mid \mathcal{B}) = \frac{P(\mathcal{A} \cap \mathcal{B})}{P(\mathcal{B})} = \frac{P(\{\text{(A, sim)}\})}{P(\{\text{(A, sim), (A, não)}\})} \\ = \frac{80/80200}{10700/80200} = 0.007$$

Exemplo: Qual a chance de cair na malha fina?

Probabilidade condicional por faixa de renda em 2002

Renda X Caiu na Malha Fina?	Sim	Não	Total
D - abaixo de 25.000	90/14100	14010/14100	14100/14100
C - 25.000 a 49.999	71/30700	30629/30700	30700/30700
B - 50.000 a 99.999	69/24700	24631/24700	24700/24700
A - acima de 100.000	80/10700	10620/10700	10700/10700

Exemplo: Qual a chance de cair na malha fina?

Probabilidade condicional por faixa de renda em 2002

Renda X Caiu na Malha Fina?	Sim	Não	Total
D - abaixo de 25.000	0.006	0.994	1
C - 25.000 a 49.999	0.002	0.998	1
B - 50.000 a 99.999	0.003	0.997	1
A - acima de 100.000	0.007	0.993	1

Independência

Vimos que:

$$P(B \mid A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Regra da multiplicação:

$$P(A \cap B) = P(A)P(B \mid A)$$

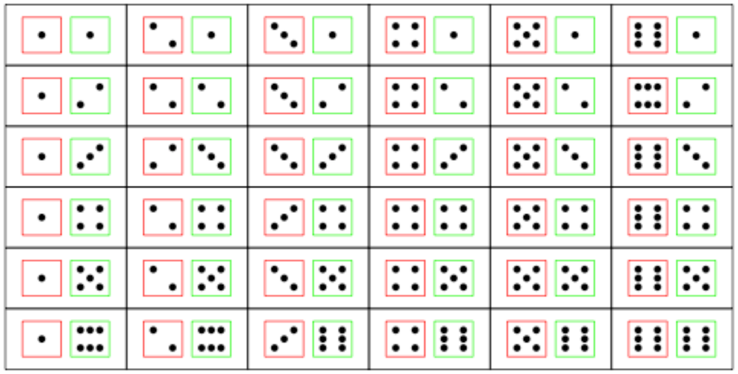
Quando $P(B \mid A) = P(B)$ (informação sobre A não altera a probabilidade do evento B), dizemos que B e A são **independentes**. Neste caso:

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

Exemplo

Considere o lançamento de dois dados “justos” (36 resultados possíveis têm a mesma probabilidade de ocorrer).

Considere os eventos:



- A: primeiro dado tem resultado 3.
- B: soma dos dados é igual a 8.
- C: soma dos dados é igual a 7.

Perguntas:

- Eventos A e B são independentes?
- E os eventos A e C são independentes?

Exemplo

Eventos A e B são independentes?

$P(A \cap B) = P(\{(3,5)\}) = \frac{1}{36}$

$P(A) = P(\{(3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(3,5),(3,6)\}) = \frac{6}{36}$

$P(B) = P(\{(2,6),(3,5),(4,4),(5,3),(6,2)\}) = \frac{5}{36}$

$$P(A \cap B) = \frac{1}{36} \neq P(A) \times P(B) = \frac{6}{36} \times \frac{5}{36}$$

Portanto, A e B **não são** eventos independentes.

Exemplo

E os eventos A e C são independentes?

$P(A \cap C) = P(\{(3,4)\}) = \frac{1}{36}$

$P(A) = P(\{(3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(3,5),(3,6)\}) = \frac{6}{36}$

$P(C) = P(\{(1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1)\}) = \frac{6}{36}$

$$P(A \cap C) = \frac{1}{36} = P(A) \times P(C) = \frac{6}{36} \times \frac{6}{36}$$

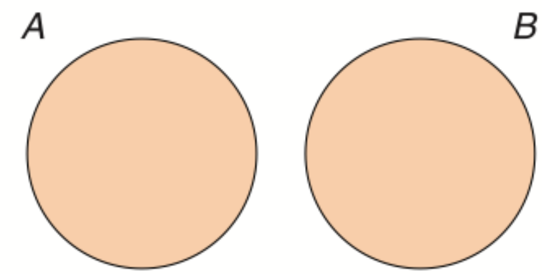
Portanto, A e C **são** eventos independentes.

Exemplo

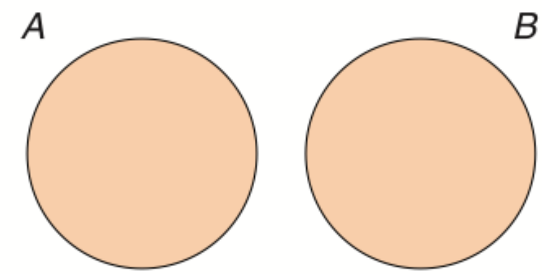
Suponha que A e B sejam dois eventos disjuntos.

Suponha que $P(A) > 0$ e $P(B) > 0$.

A e B são independentes?



Exemplo



Suponha que A e B sejam dois eventos disjuntos.

Suponha que $P(A) > 0$ e $P(B) > 0$.

A e B são independentes?

A e B são disjuntos, então $A \cap B = \emptyset$ e $P(A \cap B) = 0$.

$P(A) > 0$ e $P(B) > 0$, portanto:

$$P(A \cap B) = 0 \neq P(A)P(B).$$

A e B não são independentes.

Além disso: $P(B \mid A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = 0$, ou seja, dado que A ocorre, B não ocorre.

Exemplo

Em uma família com duas crianças, considere os eventos:

- A={a primeira criança é uma menina}
- B={as duas crianças são meninas}.

Qual a $P(B \mid A)$?

Exemplo

Em uma família com duas crianças, considere os eventos:

- A={a primeira criança é uma menina}
- B={as duas crianças são meninas}.

Qual a $P(B \mid A)$?

$$\Omega = \{FF, MM, FM, MF\}$$

$$A = \{FF, FM\} \qquad B = \{FF\} \qquad \Longrightarrow \qquad B \cap A = B$$

Portanto,

$$P(B \mid A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{P(\{FF\})}{P(\{FF, FM\})} = \frac{1/4}{1/2} = 1/2$$

Exemplo

Em uma família com duas crianças, considere os eventos:

- A={a primeira criança é uma menina}
- B={as duas crianças são meninas}.

A e B são eventos independentes?

Exemplo

Em uma família com duas crianças, considere os eventos:

- A={a primeira criança é uma menina}
- B={as duas crianças são meninas}.

A e B são eventos independentes?

$\Omega = \{FF, MM, FM, MF\}$

$A = \{FF, FM\} \qquad B = \{FF\} \qquad \Longrightarrow \qquad B \cap A = B$

Então, $P(B \cap A) = P(B) = \frac{1}{4}$ e

$$P(A)P(B) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{8} \neq P(B \cap A)$$

Portanto, A e B não são independentes.

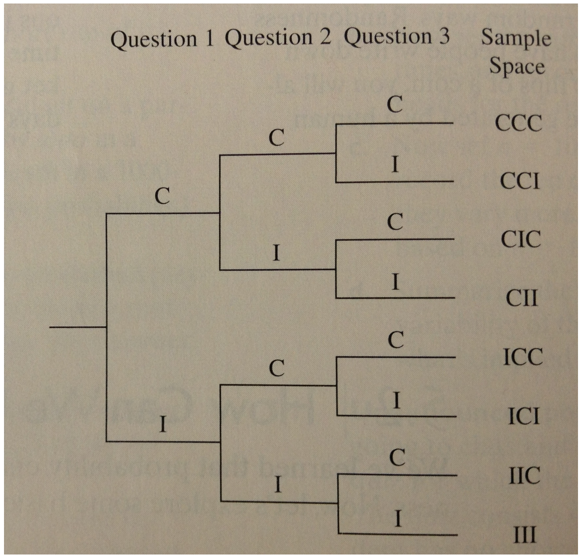
Chutar as respostas e ainda passar na prova

Chutar: escolher as respostas ao acaso

Temos uma prova com três questões de múltipla escolha.

Em cada questão há 5 alternativas, apenas 1 é correta.

Experimento: anotar o resultado do aluno na prova.

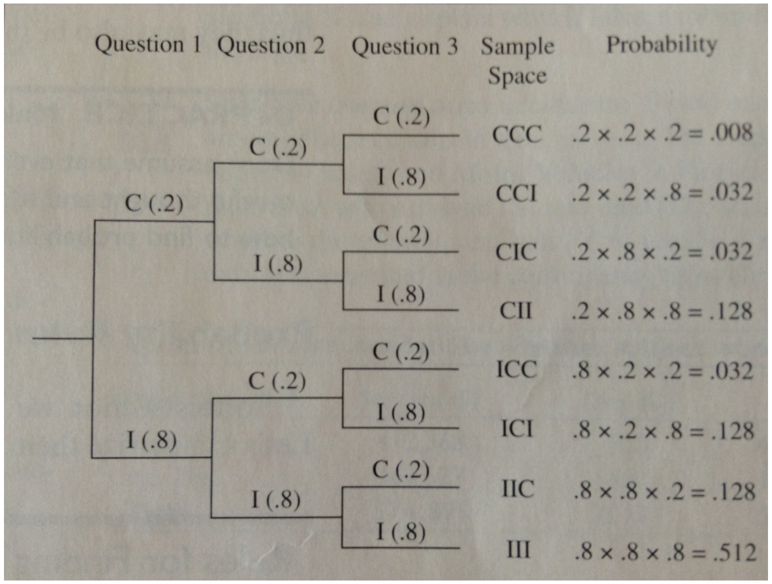


Espaço amostral:

$$\Omega = \{CCC, CCI, CIC, CII, ICC, ICI, IIC, III\}$$

Chutar as respostas e ainda passar na prova

Quais as probabilidades dos eventos do espaço amostral?



Chutar as respostas e ainda passar na prova

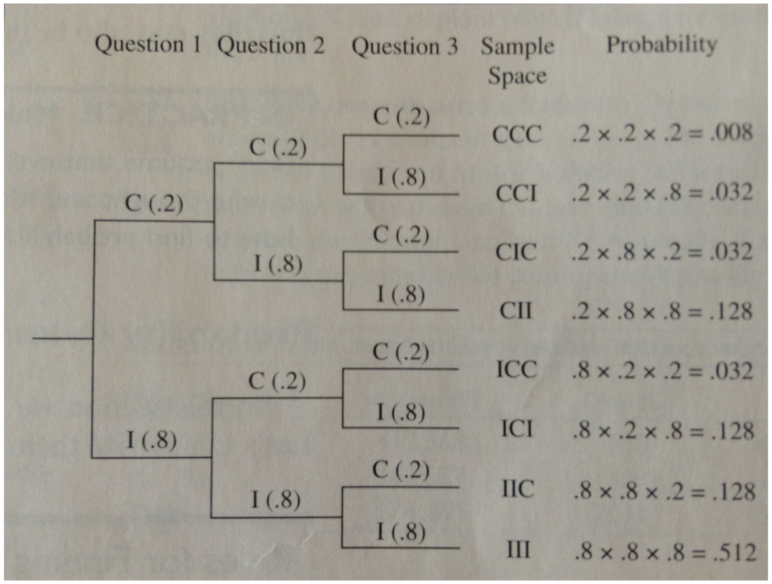
Quais as probabilidades dos eventos do espaço amostral?

Para cada questão:

$$P(C) = 0.2 \quad \text{e} \quad P(I) = 0.8$$

Então, a probabilidade de acertar as três questões é:

$$\begin{aligned} P(CCC) &= P(C) \times P(C) \times P(C) \\ &= (0.2)(0.2)(0.2) \\ &= (0.2)^3 = 0.008 \end{aligned}$$

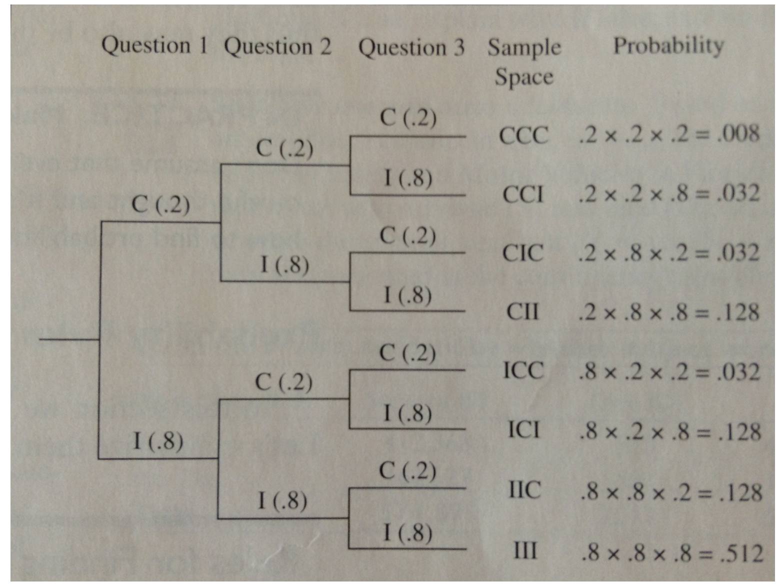


Chutar as respostas e ainda passar na prova

Quais as probabilidades dos eventos do espaço amostral?

Para cada questão:

$$P(C) = 0.2 \quad \text{e} \quad P(I) = 0.8$$



Então, a probabilidade de acertar as três questões é:

$$\begin{aligned} P(CCC) &= P(C) \times P(C) \times P(C) \\ &= (0.2)(0.2)(0.2) \\ &= (0.2)^3 = 0.008 \end{aligned}$$

Qual a probabilidade do aluno acertar pelo menos duas questões?

Chutar as respostas e ainda passar na prova

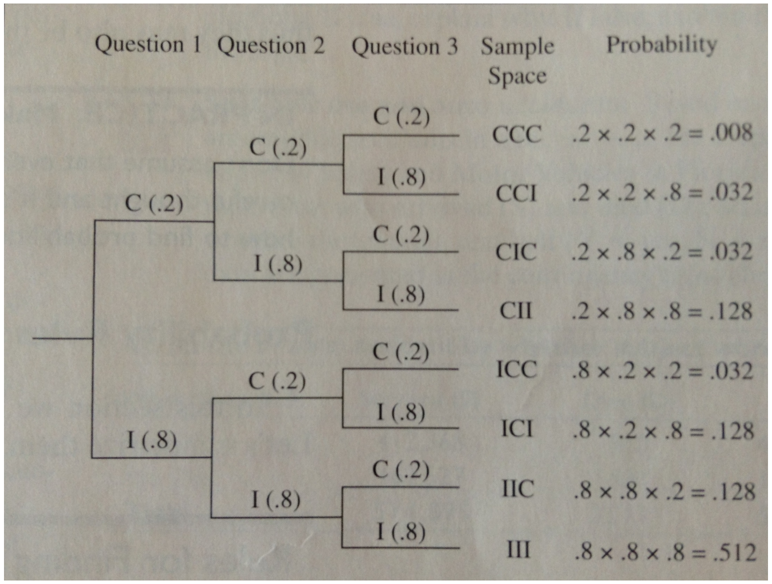
Quais as probabilidades dos eventos do espaço amostral?

Para cada questão:

$$P(C) = 0.2 \quad \text{e} \quad P(I) = 0.8$$

Então, a probabilidade de acertar as três questões é:

$$\begin{aligned} P(CCC) &= P(C) \times P(C) \times P(C) \\ &= (0.2)(0.2)(0.2) \\ &= (0.2)^3 = 0.008 \end{aligned}$$



Qual a probabilidade do aluno acertar pelo menos duas questões?

$$P(CCC) + P(CCI) + P(CIC) + P(ICC) = 0.008 + 3 \times 0.032 = 0.104$$

Cinto de segurança e acidentes

Uso de cinto / Sobreviveu	Sim (S)	Não ($\bar{S}$)	Total
Sim (C)	414368	510	**412878**
Não ($\bar{C}$)	162527	1601	**164128**
Total	**574895**	**2111**	**577006**

Qual a probabilidade de que a pessoa morreu no acidente?

Cinto de segurança e acidentes

Uso de cinto / Sobreviveu	Sim (S)	Não ($\bar{S}$)	Total
Sim (C)	414368	510	**412878**
Não ($\bar{C}$)	162527	1601	**164128**
Total	**574895**	**2111**	**577006**

Qual a probabilidade de que a pessoa morreu no acidente?

$$P(\bar{S}) = \frac{2111}{577006} = 0.004$$

Cinto de segurança e acidentes

Uso de cinto / Sobreviveu	Sim (S)	Não ($\bar{S}$)	Total
Sim (C)	414368	510	**412878**
Não ($\bar{C}$)	162527	1601	**164128**
Total	**574895**	**2111**	**577006**

Qual a probabilidade de que a pessoa morreu no acidente?

$$P(\bar{S}) = \frac{2111}{577006} = 0.004$$

Qual a probabilidade de que a pessoa morreu dado que ela usava o cinto de segurança?

Cinto de segurança e acidentes

Uso de cinto / Sobreviveu	Sim (S)	Não ($\bar{S}$)	Total
Sim (C)	414368	510	**412878**
Não ($\bar{C}$)	162527	1601	**164128**
Total	**574895**	**2111**	**577006**

Qual a probabilidade de que a pessoa morreu no acidente?

$$P(\bar{S}) = \frac{2111}{577006} = 0.004$$

Qual a probabilidade de que a pessoa morreu dado que ela usava o cinto de segurança?

$$P(\bar{S} \mid C) = \frac{P(\bar{S} \cap C)}{P(C)} = \frac{510}{412878} = 0.001$$

Cinto de segurança e acidentes

Uso de cinto / Sobreviveu	Sim (S)	Não ($\bar{S}$)	Total
Sim (C)	414368	510	**412878**
Não ($\bar{C}$)	162527	1601	**164128**
Total	**574895**	**2111**	**577006**

Qual a probabilidade de que a pessoa morreu dado que ela não usava o cinto de segurança?

Cinto de segurança e acidentes

Uso de cinto / Sobreviveu	Sim (S)	Não ($\bar{S}$)	Total
Sim (C)	414368	510	**412878**
Não ($\bar{C}$)	162527	1601	**164128**
Total	**574895**	**2111**	**577006**

Qual a probabilidade de que a pessoa morreu dado que ela não usava o cinto de segurança?

$$P(\bar{S} \mid \bar{C}) = \frac{P(\bar{S} \cap \bar{C})}{P(\bar{C})} = \frac{1601}{164128} = 0.01$$

Cinto de segurança e acidentes

Uso de cinto / Sobreviveu	Sim (S)	Não ($\bar{S}$)	Total
Sim (C)	414368	510	**412878**
Não ($\bar{C}$)	162527	1601	**164128**
Total	**574895**	**2111**	**577006**

Qual a probabilidade de que a pessoa morreu dado que ela não usava o cinto de segurança?

$$P(\bar{S} \mid \bar{C}) = \frac{P(\bar{S} \cap \bar{C})}{P(\bar{C})} = \frac{1601}{164128} = 0.01$$

Morte e uso de cinto são eventos independentes?

Cinto de segurança e acidentes

Uso de cinto / Sobreviveu	Sim (S)	Não ($\bar{S}$)	Total
Sim (C)	414368	510	**412878**
Não ($\bar{C}$)	162527	1601	**164128**
Total	**574895**	**2111**	**577006**

Qual a probabilidade de que a pessoa morreu dado que ela não usava o cinto de segurança?

$$P(\bar{S} \mid \bar{C}) = \frac{P(\bar{S} \cap \bar{C})}{P(\bar{C})} = \frac{1601}{164128} = 0.01$$

Morte e uso de cinto são eventos independentes?

$$P(\bar{S}) = \frac{2111}{577006} = 0.004$$

Como $P(\bar{S} \mid C) \neq P(\bar{S})$, os eventos não são independentes.

Exemplo

Uma sacola contém 10 sementes de flores vermelhas e 5 de flores brancas. Selecionamos duas sementes ao acaso, uma a uma e sem reposição.

Qual é a probabilidade de que :

- a primeira semente seja vermelha?
- a segunda seja branca se a primeira foi vermelha?

Exemplo

Uma sacola contém 10 sementes de flores vermelhas e 5 de flores brancas. Selecionamos duas sementes ao acaso, uma a uma e sem reposição.

Qual é a probabilidade de que :

- a primeira semente seja vermelha?
- a segunda seja branca se a primeira foi vermelha?

Defina os eventos:

A = {a primeira semente é vermelha} e B={a segunda semente é branca}

Então:

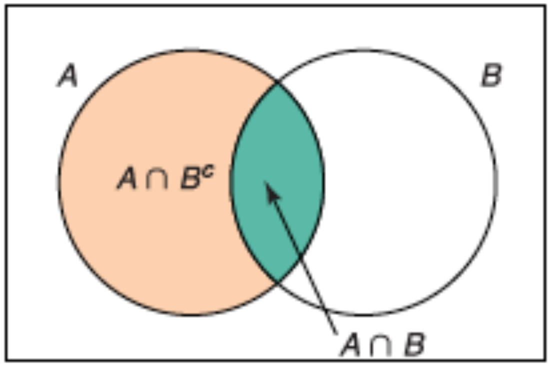
$$P(A) = \frac{10}{15} = \frac{2}{3} \qquad \text{e} \qquad P(B|A) = \frac{5}{14}$$

Teorema de Bayes

Considere dois eventos quaisquer A e B.

Para que um elemento esteja em A, há duas possibilidades:

- o elemento está em A e em B;
- o elemento está em A, mas não está em B.



Portanto, podemos escrever:

$$A = (A \cap B) \cup (A \cap B^c)$$

As duas possibilidades são disjuntas, então:

$$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap B^c)$$

Teorema das Probabilidades Totais

Vimos que: $P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap B^c)$

E sabemos que:

$$P(A \cap B) = P(A \mid B)P(B)$$

$$P(A \cap B^c) = P(A \mid B^c)P(B^c)$$

Então reescrevemos:

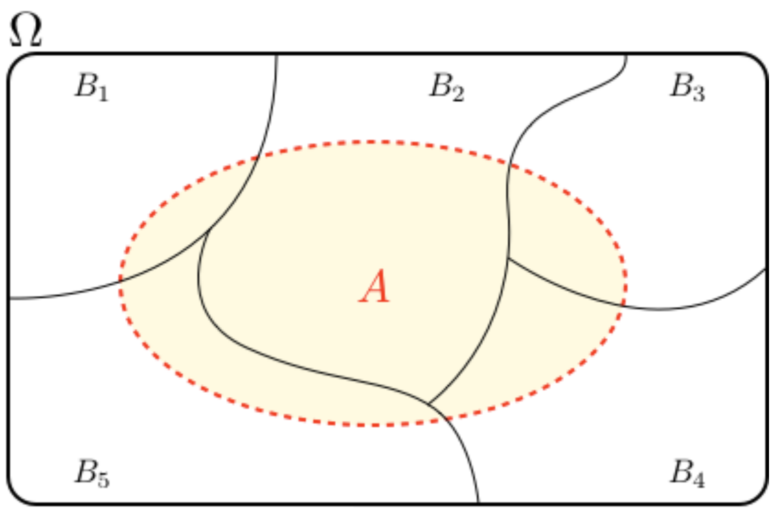
$$P(A) = P(A \mid B)P(B) + P(A \mid B^c)P(B^c)$$

Interpretação: a probabilidade do evento A é uma média ponderada de $P(A \mid B)$ e $P(A \mid B^c)$. O peso de cada probabilidade condicional é a probabilidade do evento que está sendo levado em conta ao calcular a probabilidade condicional de A.

Teorema das Probabilidades Totais

Seja $\{B_1, \ldots, B_n\}$ uma partição de eventos de Ω e A um evento em Ω.

Dizemos que os eventos $\{B_1, B_2, \ldots, B_n\}$ formam um partição do espaço amostral Ω se são mutuamente exclusivos e a união desses eventos é Ω.



Então,

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A \mid B_i) P(B_i)$$

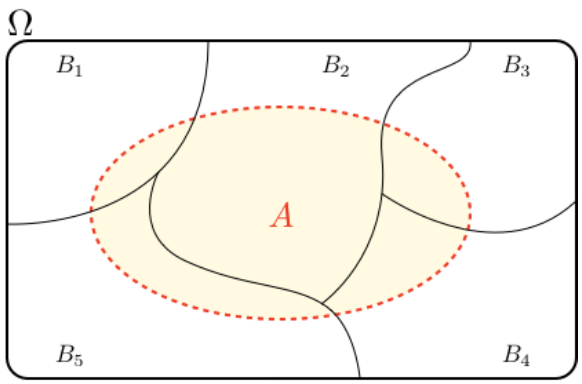
Teorema de Bayes

Se considerarmos a partição B e B^c do espaço amostral Ω e A um evento em Ω. Então:

$$P(B \mid A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{P(A \mid B)P(B)}{P(A \mid B)P(B) + P(A \mid B^c)P(B^c)}$$

No caso geral, seja $\{B_1, \ldots, B_n\}$ uma partição de eventos de Ω e A um evento em Ω:

$$P(B_i \mid A) = \frac{P(A \mid B_i)P(B_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(A \mid B_i)P(B_i)}$$



Exemplo: Teste de diagnóstico

Um exame de sangue é 99% efetivo em detectar uma certa doença quando esta está presente. No entanto, 2% são falso-positivos. Suponha que 0,5% da população tem a doença.

Qual a probabilidade condicional de que um indivíduo testado aleatoriamente tenha a doença dado que o teste deu positivo?

Exemplo: Teste de diagnóstico

Um exame de sangue é 99% efetivo em detectar uma certa doença quando esta está presente. No entanto, 2% são falso-positivos. Suponha que 0,5% da população tem a doença.

Qual a probabilidade condicional de que um indivíduo testado aleatoriamente tenha a doença dado que o teste deu positivo?

Temos que,

- 0,5% da população tem a doença;
- o exame é 99% efetivo em detectar a doença quando esta está presente; e
- 2% são falso-positivos.

Exemplo: Teste de diagnóstico

Considere os eventos: D = {estar doente} e TP = {testar positivo}, temos que

$$P(TP \mid D) = 0.99, \qquad P(TP \mid D^c) = 0.02 \quad \text{e} \quad P(D) = 0.005$$

Então,

$$\begin{aligned}
P(D \mid TP) &= \frac{P(TP \mid D)P(D)}{P(TP)} \\
&= \frac{P(TP \mid D)P(D)}{P(TP \mid D)P(D) + P(TP \mid D^c)P(D^c)} \\
&= \frac{0.99 \times 0.005}{0.99 \times 0.005 + 0.02 \times 0.995} = 0.20
\end{aligned}$$

Câncer de Mama

Câncer de mama afeta 1% das mulheres.

Mamografia é o teste padrão para detectar câncer de mama. Mas sabe-se que não é um teste perfeito.

Estatísticas mostram que:

- a mamografia é 80% efetiva em detectar o câncer quando este realmente existe.
- 9.6% das mamografias resultam em falsos positivos (teste positivo quando o câncer não existe).

Suponha que sua mãe faz uma mamografia e o resultado é positivo. Qual é a probabilidade dela realmente estar com câncer de mama?

Exemplo: Companhia de Seguros

Uma companhia de seguros acredita que as pessoas podem ser divididas em duas categorias:

1. aquelas que estão mais sujeitas a acidentes.
2. aquelas que não estão mais sujeitas a acidentes.

Os dados indicam que uma pessoa da categoria 1 terá um acidente durante o período de um ano com probabilidade 0.1.
A probabilidade para todas as outras pessoas é 0.05.

Suponha que a probabilidade de um novo cliente pertencer à categoria 1 seja 0.2.

Qual a probabilidade de que o novo cliente tenha um acidente durante o primeiro ano? E se um novo cliente tem um acidente durante o primeiro ano, qual é a probabilidade de que ele pertença à categoria 1?

Exemplo: Companhia de Seguros

Pergunta: Qual a probabilidade de que o novo cliente tenha um acidente durante o primeiro ano?

Considere os eventos:

A = {o novo cliente tem um acidente durante o primeiro ano}
B = {o novo cliente pertence à categoria 1}
B^c = {o novo cliente pertence à categoria 2}

Pelo Teorema das Probabilidades Totais:

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A \mid B)P(B) + P(A \mid B^c)P(B^c) \\ &= 0.1 \times 0.2 + 0.05 \times 0.8 = 0.06 \end{aligned}$$

Exemplo: Companhia de Seguros

Pergunta: Se um novo cliente tem um acidente durante o primeiro ano, qual é a probabilidade de que ele pertença à categoria 1?

A = {o novo cliente tem um acidente durante o primeiro ano}
B = {o novo cliente pertence à categoria 1}

Pelo Teorema de Bayes:

$$P(B \mid A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{P(A \mid B)P(B)}{P(A)}$$
$$= \frac{0.1 \times 0.2}{0.06} = \frac{1}{3}$$

Exemplo: DNA e crime

Dado que o réu é inocente (I), suponha que a probabilidade do DNA dele ser compatível (C) com o DNA encontrado na cena do crime seja 1 em um milhão.

$$P(C \mid I) = 0.000001$$

Dado que o réu é culpado ($\bar{I}$), suponha que a probabilidade do DNA dele ser compatível com o DNA da cena do crime seja 0.99.

$$P(C \mid \bar{I}) = 0.99$$

O DNA do réu é compatível com o DNA da cena do crime.

Encontre a probabilidade do réu ser inocente dado que o DNA é compatível, sendo que a probabilidade incondicional dele ser inocente, $P(I)$, é 0.5.

Exemplo: DNA e crime

Queremos $P(I \mid C)$, sendo que $P(I) = P(\bar{I}) = 0.5$

Pelo Teorema de Bayes:

$$
\begin{aligned}
P(I \mid C) &= \frac{P(I \cap C)}{P(C)} = \frac{P(C \mid I)P(I)}{P(C)} \\
&= \frac{P(C \mid I)P(I)}{P(C \mid I)P(I) + P(C \mid \bar{I})P(\bar{I})} \\
&= \frac{0.000001 \times 0.50}{0.000001 \times 0.5 + 0.99 \times 0.5} \\
&= 0.000001
\end{aligned}
$$

A chance de ser inocente dado que houve compatibilidade de DNA é 1 em 1 milhão.

Exemplo: DNA e crime

Encontre a probabilidade do réu ser inocente dado que o DNA é compatível, sendo que a probabilidade incondicional dele ser inocente, $P(I)$, é 0.99.

$$
\begin{aligned}
P(I \mid C) = \frac{P(I \cap C)}{P(C)} &= \frac{P(C \mid I)P(I)}{P(C)} \\
&= \frac{P(C \mid I)P(I)}{P(C \mid I)P(I) + P(C \mid \bar{I})P(\bar{I})} \\
&= \frac{0.000001 \times 0.99}{0.000001 \times 0.99 + 0.99 \times 0.01} \\
&= 0.00001
\end{aligned}
$$

A chance de ser inocente dado que houve compatibilidade de DNA é 1 em 100 mil.

Leituras

- OpenIntro: seção 2.2.
- Ross: seções 4.5, 4.6
- Magalhães: capítulo 2

Slides adaptados do material produzido pelos professores:

- Samara Kiihl
- Tatiana Benaglia
- Larissa Matos
- Benilton Carvalho